

二次元ボロノイ図描画システムの構築

島田 将成

1 はじめに

近年, 計算幾何学やその他の研究分野において, ボロノイ図 (Voronoi diagram) が脚光を浴びている. ボロノイ図は, 最近点問題を解くためのデータ構造であり, 社会学, 数学, 生物学, 物理学および考古学を始めとする様々な科学分野で利用されてきた. 今回の演習では, C 言語で Win32 API 関数を用いて, ボロノイ図の GUI 表示を行うプログラムを作成した. また, 各母点の持つ座標値を用いて, Rastrigin 関数上で最適解探索を行った.

2 ボロノイ図

2.1 概要

ボロノイ図は, 任意の位置に配置された複数の点 (母点) に対して, どの母点に近いかによって領域分けされた図のことであり, 各点はそれ自身を含む領域と対応する¹⁾. Fig.1 に示すように, 各母点は必ず領域を持っており, 1 つの領域には 1 母点しか存在しない. また, ある領域内に任意に配置された点から見て, その領域を持つ母点があつてもっとも距離が近いという性質がある. つまり, 母点 a をもつ領域 A 内に, 任意の点 b が配置された場合, b は領域 A 内にあるので, b からは母点 a が最も近いということになる.

以上のような性質を持つボロノイ図の応用範囲は広く, 公立の小中学校の校区設定, スーパーの出店計画, 携帯電話の最も近い基地局の決定, 画像データの圧縮などに利用されている.

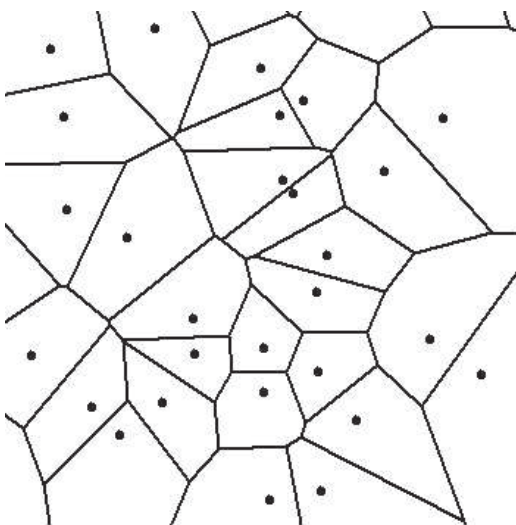


Fig.1 ボロノイ図 (出典: 自作)

2.2 定義

有限部分集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ および, 距離関数 d に対して, $i \neq j$ の時,

$$V(p_i) = \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}$$

で構成される領域 $V(p_i)$ を母点 p_i のボロノイ領域という. また, $\{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$ をボロノイ図, ボロノイ領域の境界をボロノイ辺, 各々のボロノイ境界の交点をボロノイ点という⁴⁾. これらを Fig.2 に示す.

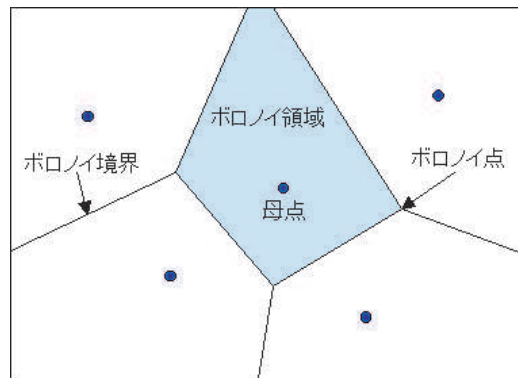


Fig.2 ボロノイ図の構成 (出典: 参考文献⁴⁾ より引用)

2.3 アルゴリズム

ボロノイ図描画のアルゴリズムを以下の 1~8 に示す.

1. ある 2 母点 i, j 間の垂直二等分線を引く.
2. i, j 以外の全母点を順次 k とし, i, k 間の垂直二等分線を順次引いていく.
3. i, j 間の垂直二等分線と i, k 間の垂直二等分線の交点を求め, 配列 $t[]$ に格納し, x 座標の小さい順にソートする.
4. 交点の $t[0]$ と $t[1]$ を結ぶ線分の中点 m を求める.
5. 中点 m から i または j までの距離を測る.
6. 中点 m から i, j 以外の全ての母点との距離を測り, 中点 m と i, j の距離がもっとも小さい, つまり i, j が m から最も近い母点であるなら, 交点 $t[0]$ と $t[1]$ を結ぶ線分を引く.
7. 4~6 を $(t[1]$ と $t[2])$ $(t[n-1]$ と $t[n])$ のように, 他の 2 交点のペアに対して繰り返す. ただし, 右端と左端のペアは考えなくてよい.
8. 以上 1~7 を, 全ての母点について繰り返し行い, ボロノイ図を描く.

3 ポロノイ図描画システム

3.1 システムの概要

ランダムに散りばめられた母点に対するポロノイ図を描画するシステムを構築した。本システムでは、ランダムに散りばめられた母点に対する Rastrigin 関数

$f(x_1, x_2) = 20 + ((x_1)^2 - 10\cos(2\pi x_1)) + ((x_2)^2 - 10\cos(2\pi x_2))$ の値を求め、最適解に最も近い点を赤色で表示している。Fig.3 にシステムの実行画面を示す。また、二次元の Rastrigin 関数は Fig.4 に示すように、座標 (0,0) において最適解を持ち、かつ、 x_1 軸と x_2 軸を持つため、Fig.3 の実行画面上において、横軸を x_1 、縦軸を x_2 とし、赤色の破線で示す。

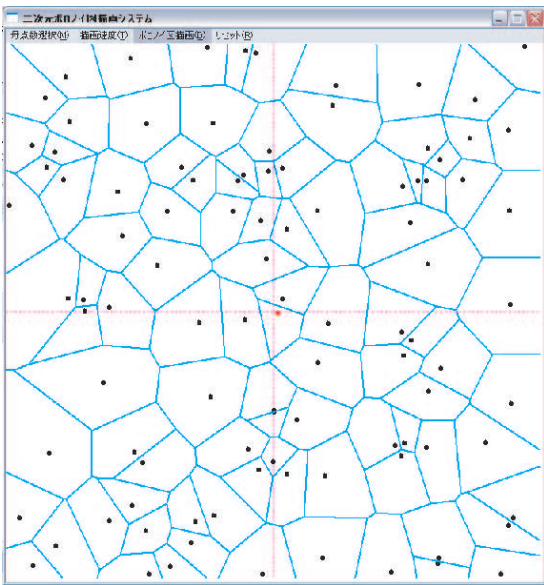


Fig.3 システムの実行画面 (出典：自作)

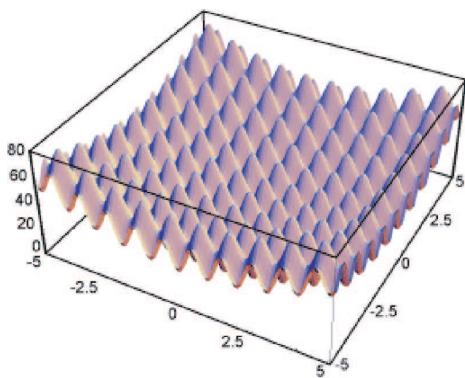


Fig.4 Rastrigin 関数 (出典：参考文献⁶⁾より引用)

3.2 機能

本システムは、母点数選択、描画速度、ポロノイ図描画、リセットの機能を持つ。各機能についての詳細を以下に示す。

- 母点数選択
1～5点, 10点, 15点, 20点, 25点, 30点, 50点, 100点の中から母点数を選択することができる。初期設定は1点となっている。
- 描画速度
描画の速度の設定を行う。数値が大きくなるほど描画をゆっくりと見せることができる。初期設定は500ms。
- ポロノイ図描画
選択された母点数分だけ、点をランダムに発生させ、選択された描画速度でポロノイ図の描画を開始する。
- リセット
描画された図を消去し、クライアント領域を初期化する。この処理が行われるまで、新たなポロノイ図を描画することはできない。

4 まとめ

今回の演習では、クライアント領域に Rastrigin 関数を適用したポロノイ図の描画システムを構築した。

今後は、本システムに解探索の機能を追加し、探索の様子をアニメーションのように可視化する機能を追加する。この機能により、SA の探索過程を可視化することができ、どの領域が集中的に探索されているのかを表示することができる。また今後は、対象問題を Rastrigin 関数以外のものにも適用し、解の探索過程を可視化していく。

参考文献

- 1) 譚学厚. 計算幾何学入門. 森北出版. 2001
- 2) 赤坂玲音. Windows ゲームプログラミング. ソフトバンククリエイティブ. 2004
- 3) 桑井康孝. 猫でもわかる Windows プログラミング. ソフトバンククリエイティブ. 2004
- 4) 離散ポロノイ図と波面法アルゴリズム
<http://www.ics.kagoshima-u.ac.jp/~fuchida/edu/algorithm/voronoi-diagram/index.html>
- 5) 大山崇のポロノイ図のページ
<http://www.nirarebakun.com/voro/voro.html>
- 6) Genetic Algorithms Research Group
<http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/research/pdga/index.html>
- 7) Simulated Annealing Group
<http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/research/SA/index.html>