

LU 分解の並列化
斉藤 宏樹

1 今月の課題

今月の課題は、HPL(High-Performance Linpack Benchmark) のメインアルゴリズムである LU 分解の並列化の理解である。

2 課題の進捗状況

2.1 LU 分解

LU 分解は、連立 1 次方程式の解法である。連立 1 次方程式における係数行列を、Fig. 1 に示すように、下三角行列 L (lowertriangular matrix) と上三角行列 U (upper triangular matrix) の積に分解する。

$$A = LU \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Fig. 1 三角行列 L と U

そして Fig. 2 に示す手順で解 x を求めることができる。

$$Ax = b$$

$$A = LU \text{ より}$$

$$LUx = b$$

$$Ux = y \text{ とおくと}$$

$$Ly = b$$

これを満たす y を求め、 $Ux=y$ より x を求める。

Fig. 2 三角行列 L と U から解 x を求める手順

このとき、 L と U は三角行列のため、 $Ly = b$ から y を求める計算量や、 $Ux = y$ から解 x を求める計算量は、前進代入法・後進代入法によって、 $O(n^2)$ となる。LU 分解せずに解 x を求める場合、計算量は $O(n^3)$ となるので、LU 分解は少ない計算量で解くことができる。

2.2 LU 分解の並列化

LU 分解の並列化を理解するため、HPL における行列の各プロセスへの割り当て方、また各プロセス間の通信情報や通信方法について調査した。

2.2.1 行列の分配方法

HPL では、行、列二方向にブロック・サイクリック分割方法を用いて、行列を分配している。ブロックサイクリック分割とは、いくつかの列 (行) を各プロセスに循環して割り当てる方法である (Fig. 3 参照)。



Fig. 3 ブロックサイクリック分割

2.2.2 各プロセスとの通信

LU 分解の並列化においては、以下の通信が発生する可能性がある。

1. 枢軸要素の交換による通信

枢軸要素の交換には、計算途中の丸め誤差の影響を減らすという目的と、計算途中で枢軸要素が 0 になることを防ぐ目的がある。Fig. 4 のように行方向へのブロック分割の場合は、行方向への通信が発生する。



1 行 1 列目の枢軸要素に、最大がくるように行交換を行う。

Fig. 4 枢軸要素の交換

2. 行列の更新情報の通信

枢軸要素以下を 0 にする演算は、全行の要素を更新する必要があるため、各プロセスに各行への更新情報を送信しなければならない。Fig. 5 の場合には、列方向へブロック・サイクリック分割しており列方向への通信が発生する。

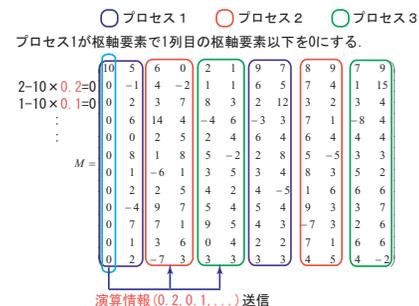


Fig. 5 更新情報の送信

3 翌月への課題

Grid 環境下で、最適な HPL の問題サイズ N 、ブロックサイズ NB を求める DGA の実装が挙げられる。